/20

Nom : Date :

1) (Cours) Soit (f_n) une suite de fonctions continues de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$, qui converge uniformément sur I vers f. Montrer que f est continue.
2) Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.
Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) \geq 0$.

Correction :

2) La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormale. Ainsi, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où, comme A est positive, $\lambda_i \geq 0$. On a alors :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(PDP^TB) = \mathrm{Tr}(DP^TBP)$$

Ensuite, il est facile de remarquer que $C = P^TBP$ est une matrice symétrique réelle positive, donc à coefficients diagonaux positifs. Par suite,

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(DC) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} D_{i,k} C_{k,i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_{i,i} \geq 0$$