Nom : Date : /20

1) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. Montrer que f admet un point fixe.
2) Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$$

Montrer que a, b et c sont racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$ avec $0 \leq k \leq 4/27$.

Correction :

1) Posons l'ensemble $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leq x\}$, non vide car $f(1) \leq 1$. On peut donc s'intéresser à sa borne inférieure qui a tout l'air d'être un bon candidat. Pour tout $x \in A$, on a $\inf(A) \leq x$, donc par croissance de f :

$$f(\inf(A)) \leq f(x) \leq x$$

Ainsi $f(\inf(A))$ minore A, d'où l'on tire $f(\inf(A)) \leq \inf(A)$ et par croissance $f(f(\inf(A))) \leq f(\inf(A))$, i.e. $f(\inf(A)) \in A$. On a donc trouvé un élément de A qui minore A, nécessairement $f(\inf(A)) = \inf(A)$.

2) Comme $A \in O_3(\mathbb{R})$, on en déduit que $s_2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et que $\sigma_2 = ab + ca + bc = 0$. De plus $\det(A) = 1$, calculons alors ce déterminant :

$$\det(A) = a(a^2 - bc) - c(ab - c^2) + b(b^2 - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = s_3 - 3\sigma_3$$

Un calcul classique sur les sommes de Newton donne $s_3 = s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3$, et donc $1 = \det(A) = s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 = \sigma_1$. On a donc a, b et c racines de $X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 = X^3 - X^2 - \sigma_3$, qui est bien de la forme demandée.

En notant $P(X) = X^3 - X^2 + k$, il reste à montrer que $0 \leq k \leq 4/27$. On a $P'(X) = X(3X - 2)$ ainsi P est strictement croissant sur $]-\infty, 0]$, strictement décroissant sur $[0, 2/3]$ et strictement croissant sur $[2/3, +\infty[$. Il est donc nécessaire d'avoir $P(0) \geq 0$ et $P(2/3) \leq 0$ si l'on veut trois racines réelles. Or $P(0) = k$ et $P(2/3) = k - 4/27$, d'où la condition attendue.