

Nom :

Date :

- 1) (Cours) Montrer qu'une série numérique absolument convergente converge.
- 2) Soit E un espace préhilbertien réel et $T \in L(E)$ tel que $\|T\| \leq 1$.
Montrer que $T(x) = x$ si et seulement si $(T(x), x) = \|x\|^2$.

Correction :

2) Le sens direct est immédiat, réciproquement d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\|x\|^2 = (T(x), x) \leq \|T(x)\| \|x\| \leq \|x\|^2$$

Il y a donc égalité à tous les niveaux, et en particulier dans Cauchy-Schwarz, ainsi $T(x) = \lambda x$. Ensuite, $(T(x), x) = \lambda \|x\|^2$ implique $x = 0$ ou $\lambda = 1$.