Nom : Date : /20

1) Soit E un espace préhilbertien réel et $T \in L(E)$ tel que $|||T||| \leq 1$.
Montrer que $T(x) = x$ si et seulement si $(T(x), x) = ||x||^2$.
2) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ différente des applications constantes égales à 0 ou 1 et qui vérifie la propriété : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
Montrer que A est non inversible si et seulement si $f(A) = 0$.

Correction :

1) Le sens direct est immédiat, réciproquement d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$||x||^2 = (T(x), x) \leq ||T(x)||||x|| \leq ||x||^2$$

Il y a donc égalité à tous les niveaux, et en particulier dans Cauchy-Schwarz, ainsi $T(x) = \lambda x$. Ensuite, $(T(x), x) = \lambda ||x||^2$ implique $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

2) Dans un premier temps, essayons de voir ce que valent $f(0_n)$ et $f(I_n)$. On a

$$f(0_n) = f(0_n.0_n) = f(0_n)^2$$

ce qui nous donne $f(0_n) \in \{0, 1\}$. Si $f(0_n) = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(A) = f(A)f(0_n) = f(A.0_n) = f(0_n) = 1$ donc f serait constante égale à 1, ce qui est exclu. Ainsi $f(0_n) = 0$. De même, on remarque que

$$f(I_n) = f(I_n.I_n) = f(I_n)^2$$

et donc, là encore, $f(I_n) \in \{0, 1\}$. Si $f(I_n) = 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(A) = f(A.I_n) = f(A)f(I_n) = 0$ donc f serait constante égale à 0, ce qui est là encore exclu. Ainsi $f(I_n) = 1$.

• ($\Leftarrow$) Par la contraposée. Si A est inversible alors on a

$$f(A)f(A^{-1}) = f(A.A^{-1}) = f(I_n) = 1$$

On en déduit donc que $f(A)$ est non nul.

• ($\Rightarrow$) Si A est non inversible, on note $r = \mathrm{rg}(A) \leq n - 1$. On peut alors affirmer que la matrice A est équivalente à

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que J_r est nilpotente avec $J_r^{r+1} = 0_n$. Ainsi, si l'on écrit $A = PJ_rQ$ avec $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors

$$f(A)^{r+1} = f(P)^{r+1} f(J_r^{r+1}) f(Q)^{r+1} = f(P)^{r+1} f(0_n) f(Q)^{r+1} = 0$$

Ce qui donne bien $f(A) = 0$.