Existe-t-il des fonctions $y \in D^2(\mathbb{R})$ solutions de $x^2 y'' - 2y = x$?

On a une équation différentielle linéaire du second ordre non résolue avec second membre. En gros, toutes les difficultés dans un seul et même exercice. Bien sûr, on va chercher des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.

En posant $z(t) = y(e^t)$, on a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$ et donc $z''(t) - z'(t) - 2z(t) = (e^t)^2 y''(e^t) - 2y(e^t) = e^t$. On résout donc l'équation homogène $z'' - z' - 2z = 0$ qui donne des solutions de la forme $\alpha e^{-t} + \beta e^{2t}$, puis on cherche une solution particulière de la forme λe^t , ce qui donne $\lambda = -\frac{1}{2}$. Comme on a $y(x) = z(\ln(x))$, on a des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $\frac{\alpha}{x} + \beta x^2 - \frac{x}{2}$.

Pour résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$, on pose $z(t) = y(-e^t)$ et par un raisonnement similaire, on trouve $z(t) = \gamma e^{-t} + \delta e^{2t} + \frac{e^t}{2}$. Comme on a $y(x) = z(\ln(-x))$, on a des solutions de la forme $-\frac{\gamma}{x} + \delta x^2 - \frac{x}{2}$.

La continuité de y en 0 donne $\alpha = \gamma = 0$. De la dérivabilité de y en 0, on tire

$$-\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x} = -\frac{1}{2}$$

Cela ne nous apprend donc rien. La continuité de y' en 0 donne

$$-\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = -\frac{1}{2}$$

Cela ne nous apprend toujours rien. Regardons enfin la dérivabilité de y' en 0 (on rappelle qu'on cherche des fonctions de classe D^2 sur $\mathbb{R}$) :

$$2\delta = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y'(x) - y'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y'(x) - y'(0)}{x} = 2\beta$$

Ainsi $\beta = \delta$. La seule fonction de classe D^2 à pouvoir être solution de l'équation proposée est donc $f(x) = \beta x^2 - \frac{x}{2}$. Un simple calcul montre qu'elle est effectivement solution, ce qui conclut.