

- 1) Soient u et v deux suites de $[0, 1]$ telles que $u_n v_n \rightarrow 1$. Que dire de u_n et v_n ?
- 2) Soient u et v deux suites réelles telles que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \rightarrow 0$.
Montrer que les suites u et v tendent vers 0.
- 3) Soit u une suite réelle telle que u_{2n}, u_{2n+1}, u_{3n} convergent.
Montrer que la suite u converge.
- 4) Soit u une suite réelle telle que $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ converge.
Montrer que la suite u tend vers 0.
- 5) La réciproque est-elle vraie ?
Pour cela, on prend $u_n = 1/n$. Montrer que $S_{2n} - S_n \geq 1/2$ et conclure.

1) On a que $0 \leq u_n \leq 1$. On multiplie cette inégalité par $v_n \geq 0$ pour avoir $0 \leq u_n v_n \leq v_n \leq 1$. Le théorème des gendarmes nous assure alors que v_n tend vers 1. De même pour u_n .

2) Méthode 1 :

$0 \leq (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 \leq 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \rightarrow 0$, donc $u_n + v_n \rightarrow 0$.
Ecrivons alors que :

$$u_n v_n = (u_n + v_n)^2 - (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2)$$

Donc $u_n v_n \rightarrow 0$.

Ainsi $u_n^2 + v_n^2 = (u_n + v_n)^2 - 2u_n v_n \rightarrow 0$, et donc u_n et v_n tendent vers 0.

Méthode 2 :

$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = (u_n + v_n)^2 - u_n v_n$. On remarque que :

$$u_n v_n = \frac{1}{4} [(u_n + v_n)^2 - (u_n - v_n)^2]$$

D'où $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 = 3/4(u_n + v_n)^2 + 1/4(u_n - v_n)^2$. Ainsi, $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$ tendent vers 0. Et comme $2u_n = (u_n + v_n) + (u_n - v_n)$, on en déduit que u_n tend vers 0. De même pour v_n .

3) On note l, l' et l'' les limites respectives de u_{2n}, u_{2n+1} et u_{3n} .

u_{6n} est une sous-suite de u_{2n} et donc tend vers l , ainsi que de u_{3n} et donc tend vers l'' . Par unicité de la limite, $l = l''$.

En considérant u_{6n+3} , on montre de la même façon que $l' = l''$, et donc $l = l'$.

Ainsi, u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers la même limite et donc u_n converge.

4) On remarque que $u_n = S_n - S_{n-1}$, donc u_n tend vers 0.

5) On peut minorer brutalement la somme :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si S_n convergeait, en passant à la limite on aurait $0 \geq 1/2$, ce qui est absurde. Comme S_n est croissante, elle tend donc vers $+\infty$. Conclusion : une série convergente a son terme général qui tend vers 0 mais la réciproque est fausse.