

1) Soient $f, p \in L(E)$ avec p un projecteur.
Montrer que $p \circ f = f \circ p \iff \text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f .

2) Soient $p, q \in L(E)$.
Montrer que : $\begin{cases} p \circ q = p \\ q \circ p = q \end{cases} \iff p \text{ et } q \text{ projecteurs de même noyau.}$

3) Soit $p \in L(E)$ un projecteur différent de l'identité, et $a_\lambda = \lambda \text{Id} + (1 - \lambda)p$.
Soit $\varphi : \begin{pmatrix} K^* & \longrightarrow & \varphi(K^*) \\ \lambda & \longmapsto & a_\lambda \end{pmatrix}$, où K est le corps de base relatif à E .
Montrer que $\varphi(K^*) \subset GL(E)$ puis que φ est un isomorphisme de groupes.

1) ($\Rightarrow$) Soit $x \in \text{Im}(p)$, il existe donc $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Ainsi, on a $f(x) = f \circ p(y) = p \circ f(y) \in \text{Im}(p)$, donc $f(\text{Im}(p)) \subset \text{Im}(p)$.
Soit $x \in \text{Ker}(p)$, i.e. $p(x) = 0$, donc $p \circ f(x) = f \circ p(x) = 0$, d'où $f(x) \in \text{Ker}(p)$.
Ainsi, $f(\text{Ker}(p)) \subset \text{Ker}(p)$.

($\Leftarrow$) Soit $x \in E$. Comme p est un projecteur, $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ qui est stable par f , donc $f(x - p(x)) \in \text{Ker}(p)$, ie $p \circ f(x) - p \circ f \circ p(x) = 0$, d'où $p \circ f(x) = p \circ f \circ p(x)$.
En outre, $p(x) \in \text{Im}(p)$, et comme $\text{Im}(p)$ est stable par f , $f \circ p(x) \in \text{Im}(p)$, donc il existe $y \in E$ tel que $f \circ p(x) = p(y)$. En reprenant l'égalité précédente, on a $p \circ f(x) = p \circ f \circ p(x) = p^2(y) = p(y) = f \circ p(x)$. Conclusion : $p \circ f = f \circ p$.

2) ($\Rightarrow$) $p^2 = (p \circ q) \circ p = p \circ (q \circ p) = p \circ q = p$ donc p est un projecteur. De manière analogue, q est un projecteur. $p \circ q = p$ implique que $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$ et $q \circ p = q$ implique que $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(q)$, donc p et q ont même noyau.

($\Leftarrow$) Comme $q^2 = q$, on a $\text{Im}(q - \text{Id}) \subset \text{Ker}(q) = \text{Ker}(p)$ et donc $p(q - \text{Id}) = 0$, i.e. $p \circ q = p$. En inversant les rôles de p et q , on obtient l'autre égalité.

3) Pour $\lambda, \mu \in K$, calculons $a_\lambda \circ a_\mu = (\lambda \text{Id} + (1 - \lambda)p)(\mu \text{Id} + (1 - \mu)p)$:
 $a_\lambda a_\mu = \lambda \mu \text{Id} + (\mu(1 - \lambda) + \lambda(1 - \mu))p + (1 - \lambda)(1 - \mu)p^2 = \lambda \mu \text{Id} + (1 - \lambda \mu)p$,
car $p^2 = p$, et donc $a_\lambda a_\mu = a_{\lambda \mu}$. Donc pour $\lambda \neq 0$, $a_\lambda a_{\frac{1}{\lambda}} = a_1 = \text{Id}$ et donc a_λ est inversible pour tout $\lambda \in K^*$, d'inverse $a_{\frac{1}{\lambda}}$. On a donc bien $\varphi(K^*) \subset GL(E)$.
En outre, on a également montré que φ était un morphisme de groupes. Ensuite, φ est trivialement surjective car à valeurs dans son image.

Il reste donc à montrer qu'elle est injective, pour cela prenons $\lambda \in \text{Ker}(\varphi)$, i.e. telle que $\varphi(\lambda) = \text{Id}$. On a $\lambda \text{Id} + (1 - \lambda)p = \text{Id}$, c'est à dire $(1 - \lambda)(p - \text{Id}) = 0$. Comme $p \neq \text{Id}$, nécessairement on doit avoir $\lambda = 1$. D'où $\text{Ker}(\varphi) = \{1\}$.
Ce qui prouve que φ est injective et donc est un isomorphisme de groupes.

Remarque : Attention à bien comprendre pourquoi $(1 - \lambda)(p - \text{Id}) = 0$ avec $p \neq \text{Id}$ implique $\lambda = 1$. Soit on voit $L(E)$ comme un K -ev et alors $p - \text{Id}$ est un "vecteur" non nul, donc $1 - \lambda = 0$. Soit, on écrit qu'il existe $x \in E$ tel que $p(x) \neq x$, et donc $(1 - \lambda)(p(x) - x) = 0$ implique $1 - \lambda = 0$. Ces raisonnements sont vrais car K est un corps : cela ne fonctionne plus si l'on se contente d'anneaux (mais dans cas-là, ce ne sont plus des espaces vectoriels mais ce que l'on appelle des modules). Prenons $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et $M = A$ (A est un A -module tout comme K est un K -ev) : $2 \cdot 2 = \bar{0}$, pourtant ni le scalaire ni le vecteur ne sont nuls...