

- 1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.
- 2) Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, et prolongeable par continuité en 0.
On suppose que $xf'(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ en 0. Montrer que $l = 0$.

1) Au vu de la conclusion, on se doute bien qu'il va falloir appliquer Rolle.
Mais à quelle fonction? On peut avoir envie de considérer $g = f' - f$ qui vérifie bien les hypothèses, mais cela nous donnerait l'existence d'un c tel que $f'(c) = f''(c)$, ce qui n'est pas tout à fait ce qu'on veut. On peut appliquer Rolle à $g = (f' - f)u$, avec u une fonction bien choisie car on a encore $g(a) = g(b) = 0$. On a $g' = (f'' - f')u + (f' - f)u'$: sachant que l'on veut du $f'' - f$, on peut prendre une fonction u telle que $u = u'$, l'exponentielle par exemple. Ainsi, il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f''(c) - f(c))e^c = 0$, ce qui implique bien $f(c) = f''(c)$.

2) Par l'absurde, on suppose $l > 0$.

Comme $xf'(x)$ tend vers l en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \alpha]$,

$$xf'(x) \geq \frac{l}{2}$$

Ecrivons maintenant pour $x \leq \alpha/2$ que $f(2x) - f(x) = xf'(c_x)$ par le Théorème des Accroissements Finis (ou par son petit nom le TAF), avec $c_x \in [x, 2x]$. Comme $c_x \leq 2x \leq \alpha$, on a donc $c_x f'(c_x) \geq l/2$. D'où :

$$f(2x) - f(x) \geq \frac{xl}{2c_x} \geq \frac{l}{4} > 0$$

Pourtant, comme f se prolonge par continuité en 0, le membre de gauche tend vers 0 en 0, d'où la contradiction. Le raisonnement est le même pour $l < 0$.
Conclusion : $l = 0$.