Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$
Caractériser le cas d'égalité.

On a tout de suite envie d'utiliser l'inégalité triangulaire. Mais, comment faire apparaitre $a+b$ et $a-b$ "de ce côté-là" de l'inégalité ? Il suffit de voir que :

$$2a = (a+b) + (a-b)$$

d'où

$$2|a| = |2a| = |(a+b) + (a-b)| \leq |a+b| + |a-b|$$

De même, il n'y a pas de raison que a joue un rôle privilégié dans l'histoire, donc on écrit l'inégalité pour b :

$$2|b| = |2b| = |(a+b) - (a-b)| \leq |a+b| + |a-b|$$

En sommant les deux inégalités, on obtient le résultat demandé.

Maintenant, intéressons-nous aux cas d'égalité. Il faut donc avoir égalité à tous les niveaux, et donc dans les deux inégalités triangulaires. On doit donc avoir $a+b$ et $a-b$ positivement liés, ainsi que $a+b$ et $b-a$ positivement liés. Ce qui signifie que soit $a-b=0$, soit $a+b = \lambda(a-b) = -\mu(a-b)$ avec $\lambda, \mu \geq 0$, ce qui implique $\lambda = \mu = 0$ et donc $a+b=0$. Les cas d'égalité sont donc $a = \pm b$.

Remarque : en majorant brutalement $|a+b| + |a-b|$ par $2(|a|+|b|)$ avec deux inégalités triangulaires, on a donc pour $(a,b) \neq (0,0)$:

$$1 \leq \frac{|a+b| + |a-b|}{|a|+|b|} \leq 2$$

avec égalité à gauche ssi $a = \pm b$, et égalité à droite ssi $a = 0$ ou $b = 0$.