Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application contractante (ie $k$-lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$).
On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec $u_0 \in \mathbb{R}$ quelconque).
1) Montrer que $u_n$ est une suite de Cauchy.
2) En déduire que $f$ admet un unique point fixe.

1) Comme $f$ est contractante, on a :

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k|u_n - u_{n-1}| \leq ... \leq k^n|u_1 - u_0|$$

Dans de nombreux cours, on dit qu'une suite est de Cauchy si pour $n$ et $m$ assez grands, on a $|u_n - u_m| \leq \epsilon$. Il est équivalent de dire (et souvent plus pratique) que pour $n$ assez grand et $p \geq 0$, on a $|u_{n+p} - u_n| \leq \epsilon$.
On a donc envie de majorer $|u_{n+p} - u_n|$. Par inégalité triangulaire, on voit que $|u_{n+2} - u_n| \leq |u_{n+2} - u_{n+1}| + |u_{n+1} - u_n|$, et donc on peut continuer en écrivant :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} |u_{j+1} - u_j| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} k^j|u_1 - u_0| = k^n \frac{1-k^p}{1-k}|u_1 - u_0| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$$

Ce qui prouve bien que $u_n$ est de Cauchy.

2) Comme $\mathbb{R}$ est complet, $u_n$ converge vers une certaine limite $l$.
La fonction $f$ étant contractante, elle est continue et en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $l = f(l)$. Donc $l$ est un point fixe pour $f$.
Reste donc à montrer l'unicité. Pour cela, considérons deux points fixes $l$ et $l'$.
On peut alors écrire que :

$$|l - l'| = |f(l) - f(l')| \leq k|l - l'|$$

Comme $k < 1$, on a nécessairement $l = l'$, ce qui prouve l'unicité.

Remarque : on a démontré le théorème du point fixe de Banach pour $\mathbb{R}$. Le résultat est encore vrai pour des espaces métriques complets et la démonstration reste la même. Ce résultat donne un algorithme de calcul du point fixe (c'est la méthode des approximations successives) contrairement à d'autres théorèmes de point fixe qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer. De plus, en passant à la limite sur $p$ dans l'inégalité $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$, on obtient une majoration de l'erreur :

$$|u_n - l| \leq \frac{k^n}{1-k}|u_1 - u_0|$$