Soit P un polynôme de degré 3 unitaire.
Montrer que $\Gamma : P(x) = P(y)$ est la réunion d'une droite et d'une courbe qui, lorsqu'elle n'est pas triviale, est une ellipse dont on précisera l'excentricité.

Posons $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.

$$P(x) = P(y) \Leftrightarrow (x^3 - y^3) + p(x^2 - y^2) + q(x - y) = 0$$

En factorisant par $x - y$, cela donne :

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + p(x + y) + q) = 0$$

Donc Γ est la réunion de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe E d'équation $x^2 + xy + y^2 + p(x + y) + q = 0$. Reste à étudier E.

Son dicrimimant vaut -3 et donc E est *de genre ellipse* (donc est soit une ellipse, soit un point, soit vide). On a donc envie de faire disparaitre le terme en xy. Comme on a un terme en $x + y$, on peut remarquer astuciusement que :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}[(x + y)^2 + (x - y)^2]$$

et que :

$$xy = \frac{1}{4}[(x + y)^2 - (x - y)^2]$$

Et donc l'équation de E s'écrit :

$$\frac{3}{4}(x + y)^2 + \frac{1}{4}(x - y)^2 + p(x + y) + q = 0$$

Soit, en factorisant le carré :

$$\frac{3}{4}\left((x + y) + \frac{2p}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}(x - y)^2 = \frac{p^2}{3} - q$$

Ici apparaissent nettement les différents cas : si $p^2 < 3q$, la courbe est vide ; si $p^2 = 3q$, la courbe est réduite à un point ; si $p^2 > 3q$, la courbe est une ellipse.

Dans ce dernier cas, en notant a et b les demi-grand et demi-petit axes de l'ellipse, on a $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, bien < 1, et qui ne dépend pas de p, q et r !