Soit M un ensemble fini non vide, muni d'une LCI associative, notée multiplicativement. Montrer qu'il existe $c \in M$ tel que $c^2 = c$.

Comme M est non vide, il existe $a \in M$. L'ensemble $\{a, a^2, ...\}$ étant fini, il existe p et h tels que $a^p = a^{p+h}$. Par une récurrence élémentaire, on a $a^p = a^{p+mh}$ pour tout $m \geq 0$. En particulier, on a $a^p = a^{p+ph} = a^{p(h+1)}$.

Posons $b = a^p$, on a donc $b = b^{h+1}$. On peut multiplier cette égalité par b^{h-1}, ce qui donne $b^h = b^{2h}$. D'où le résultat en posant $c = b^h$.