

Soient $a, b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $a^n + b^n$ est premier.
 Montrer qu'alors n est une puissance de 2.

Tout d'abord, il est possible de regrouper les puissances de 2 dans l'écriture de n en produit de facteurs premiers, ce qui donne $n = 2^k(2p + 1)$. Posons alors $\alpha = a^{2^k}$ et $\beta = b^{2^k}$, on a donc :

$$a^n + b^n = \alpha^{2p+1} + \beta^{2p+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^{2p} - \alpha^{2p-1}\beta + \dots - \alpha\beta^{2p-1} + \beta^{2p})$$

Comme $a^n + b^n$ est premier et que $\alpha + \beta \geq 2$, on en déduit que $a^n + b^n = \alpha + \beta$. Or $n \geq 2^k$, donc $a^n \geq \alpha$ et $b^n \geq \beta$. Il en résulte que $a^n = \alpha$ et $b^n = \beta$, ce qui donne $p = 0$. Ainsi, n est une puissance de 2.