Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $u \in L(E)$ conservant l'orthogonalité, i.e. tel que $(x \perp y \Longrightarrow u(x) \perp u(y))$. Montrer que $\exists \lambda \geq 0 \ / \ \forall x \in E, \ ||u(x)|| = \lambda ||x||$.

L'égalité demandée implique en particulier que $||u(x)||$ est constant sur la sphère unité (l'ensemble des vecteurs de norme 1). Réciproquement, si $||u(x)|| = \lambda$ sur la sphère unité alors pour tout $y \in E$, on a

$$\lambda = \left|\left| u\left(\frac{y}{||y||}\right) \right|\right| = \left|\left| u\left(\frac{1}{||y||} y\right) \right|\right| = \left|\left| \frac{1}{||y||} u(y) \right|\right| = \frac{||u(y)||}{||y||}$$

et donc $||u(y)|| = \lambda ||y||$. Il reste donc à montrer que $||u(x)||$ est constant sur la sphère unité.

Pour cela, considérons deux vecteurs $x$ et $y$ tels que $||x|| = ||y|| = 1$. Il va bien falloir utiliser l'hypothèse à un moment, on remarque alors que

$$(x + y, x - y) = ||x||^2 - ||y||^2 = 0$$

par conservation de l'orthogonalité, on a $(u(x + y), u(x - y)) = 0$. Or,

$$(u(x + y), u(x - y)) = (u(x) + u(y), u(x) - u(y)) = ||u(x)||^2 - ||u(y)||^2$$

ce qui donne $||u(x)|| = ||u(y)||$, et donc $||u(x)||$ est constant sur la sphère unité.