

- 1) Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante et convergeant simplement vers 0. Montrer que la convergence est uniforme (i.e. $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$).
- 2) Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.
 - a) Montrer que S est bien définie et continue.
 - b) Etudier la monotonie de S .
 - c) Donner un équivalent de S en $+\infty$, puis en 0.
- 3) Soit a_n le reste de la division euclidienne de n par 2013. Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

1) On remarque directement que $\|f_n\|_\infty = \max(f_n(0), -f_n(1))$, ce qui conclut.

2)a) Les fonctions $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > a > 0$, on a :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n + n^2a}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc bien définie et continue.

b) Les f_n étant décroissantes, il en est de même pour S .

c) Posons $g_n(x) = x f_n(x)$ pour $x \geq 0$. Comme $|g_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xS(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Il en résulte que $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$. Pour l'équivalent en 0, on peut remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t+t^2x}$ est décroissante et effectuer une comparaison série-intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)}$$

Pour calculer cette intégrale, on peut voir que $\frac{1}{t(1+tx)} = \frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}$. Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \left[\ln(t) - \ln(1+tx) \right]_1^{+\infty} = \left[\ln \left(\frac{t}{1+tx} \right) \right]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$$

On en déduit donc que $S(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

3) Comme a_n est un entier compris entre 0 et 2012, il en résulte que a_n est bornée. On en déduit que $R \geq 1$. La suite a_n ne tendant pas vers 0, la série entière diverge grossièrement pour $z = 1$. Conclusion : $R = 1$.