

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ différente des applications constantes égales à 0 ou 1 et qui vérifie la propriété : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(AB) = f(A)f(B)$.
 Montrer que A est non inversible si et seulement si $f(A) = 0$.

- Dans un premier temps, essayons de voir ce que valent $f(0_n)$ et $f(I_n)$. On a

$$f(0_n) = f(0_n \cdot 0_n) = f(0_n)^2$$

ce qui nous donne $f(0_n) \in \{0, 1\}$. Si $f(0_n) = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(A) = f(A)f(0_n) = f(A \cdot 0_n) = f(0_n) = 1$ donc f serait constante égale à 1, ce qui est exclu. Ainsi $f(0_n) = 0$. De même, on remarque que

$$f(I_n) = f(I_n \cdot I_n) = f(I_n)^2$$

et donc, là encore, $f(I_n) \in \{0, 1\}$. Si $f(I_n) = 0$, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(A) = f(A \cdot I_n) = f(A)f(I_n) = 0$ donc f serait constante égale à 0, ce qui est là encore exclu. Ainsi $f(I_n) = 1$.

- ($\Leftarrow$) Par la contraposée. Si A est inversible alors on a

$$f(A)f(A^{-1}) = f(A \cdot A^{-1}) = f(I_n) = 1$$

On en déduit donc que $f(A)$ est non nul.

- ($\Rightarrow$) Si A est non inversible, on note $r = \text{rg}(A) \leq n - 1$. A est équivalente à

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que J_r est nilpotente avec $J_r^{r+1} = 0_n$. Ainsi, si l'on écrit $A = PJ_rQ$ avec $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ alors

$$f(A)^{r+1} = f(P)^{r+1}f(J_r)^{r+1}f(Q)^{r+1} = f(P)^{r+1}f(J_r^{r+1})f(Q)^{r+1} = f(P)^{r+1}f(0_n)f(Q)^{r+1} = 0$$

Ce qui donne bien $f(A) = 0$.