1) Soit u_n une suite réelle telle que $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ converge. Mq u_n tend vers 0.
2) La réciproque est-elle vraie ?
Pour cela, on prend $u_n = 1/n$. Montrer que $S_{2n} - S_n \geq 1/2$ et conclure.

1) On remarque que $u_n = S_n - S_{n-1}$, donc u_n tend vers 0.

2) On peut minorer brutalement la somme :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si S_n convergeait, en passant à la limite on aurait $0 \geq 1/2$, ce qui est absurde. Comme S_n est croissante, elle tend donc vers $+\infty$. Conclusion : une série convergente a son terme général qui tend vers 0 mais la réciproque est fausse.

Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$
Caractériser le cas d'égalité.

On a tout de suite envie d'utiliser l'inégalité triangulaire. Mais, comment faire apparaitre $a+b$ et $a-b$ "de ce côté-là" de l'inégalité ? Il suffit de voir que :

$$2a = (a+b) + (a-b)$$

d'où

$$2|a| = |2a| = |(a+b) + (a-b)| \leq |a+b| + |a-b|$$

De même, il n'y a pas de raison que a joue un rôle privilégié dans l'histoire, donc on écrit l'inégalité pour b :

$$2|b| = |2b| = |(a+b) - (a-b)| \leq |a+b| + |a-b|$$

En sommant les deux inégalités, on obtient le résultat demandé.

Maintenant, intéressons-nous aux cas d'égalité. Il faut donc avoir égalité à tous les niveaux, et donc dans les deux inégalités triangulaires. On doit donc avoir $a+b$ et $a-b$ positivement liés, ainsi que $a+b$ et $b-a$ positivement liés. Ce qui signifie que soit $a-b=0$, soit $a+b = \lambda(a-b) = -\mu(a-b)$ avec $\lambda, \mu \geq 0$, ce qui implique $\lambda = \mu = 0$ et donc $a+b=0$. Les cas d'égalité sont donc $a = \pm b$.

Remarque : en majorant brutalement $|a+b| + |a-b|$ par $2(|a|+|b|)$ avec deux inégalités triangulaires, on a donc pour $(a,b) \neq (0,0)$:

$$1 \leq \frac{|a+b| + |a-b|}{|a|+|b|} \leq 2$$

avec égalité à gauche ssi $a = \pm b$, et égalité à droite ssi $a=0$ ou $b=0$.

$\boxed{f(x) = xe^{x^2}\text{. Mq } f \text{ admet une bijection réciproque dont on donnera le } DL_6(0).}$

f est continue et strictement croissante donc elle admet une bijection réciproque. Comme $f \in C^\infty$ et que f' ne s'annule pas, $f^{-1} \in C^\infty$ et admet donc un DL à tout ordre.
On remarque que f est impaire et donc f^{-1} l'est aussi. Donc le DL sera de la forme $ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$. Trouvons maintenant un DL de f en 0 :

$$f(x) = x(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^6)$$

Reste maintenant à composer les DL, en calculant le DL de $f^{-1} \circ f$ ou $f \circ f^{-1}$ (au choix). Après calculs, on obtient :

$$x = ax + (a + b)x^3 + (\frac{a}{2} + 3b + c)x^5 + o(x^6)$$

donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = 5/2$. Conclusion :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^6)$$